МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені І.І. МЕЧНИКОВА

Інститут математики, економіки та механіки

Методичні вказівки на тему :

«Класичні методи розв’язання задач екстремуму функцій»

По дисципліні «Методи оптимізації»

Студентам факультету «математика»

Частина 1

Одеса 2012

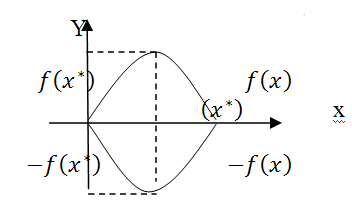
**Вступ**.

Теорію задач на пошук найбільших и найменших величин називають теорією екстремальних задач. Слово **maximum** на латині означає «найбільший», слово **minimum** – «найменший». Обидва ці терміни об’єднуються словом «екстремум» (extr).

Слово «екстремум», як термін, що об’єднує поняття «максимум» і «мінімум», ввів для вживання Дюбуа-Реймон.

Запис задачі в вигляді f(x) extr значить, що ми повинні розв’язати задачу на мінімум і задачу на максимум.

Задачу на максимум завжди можна звести до задачі на мінімум, якщо замінити задачу f(x) max на задачу [-f(x)]min, тобто задача пошуку максимуму функції f(x) зводиться до задачі пошуку мінімуму шляхом зміни знаку перед функцією на протилежний:



**Мал. 1.1**

При вивчені будь-якого типу задач оптимізації важливе місце займає питання про умови оптимальності, або умови екстремуму.

Розрізняють НЕОБХІДНІ умови оптимальності, тобто ті умови, яким повинна задовольняти точка, яка є розв’язком задачі і ДОСТАТНІ умови оптимальності, тобто ті умови, із яких випливає, що саме ця точка є розв’язком задачі.

Цікавість до умов оптимальності пояснюється тим, що вони, по-перше, складають основу якісних методів теорії оптимізації, тобто методів, що направлені на вивчення властивостей екстремальних задач, по-друге використовуються при побудові і обґрунтуванні чисельних методів розв’язку цих задач, по-третє, дають можливість в простих випадках явно розв’язати задачу.

Або, іншими словами, в зв’язку з кожною екстремальною задачею виникають питання: які необхідні умови екстремуму, які достатні умови, чи існує розв’язок задачі і як знайти цей розв’язок - явно (аналітично) або чисельно.

В теорії екстремальних задач найбільш дослідженні необхідні умови. Виписуючи ці необхідні умови екстремуму, ми знаходимо деяку множину точок, які задовольняють цим умовам. Ця множина точок (ми називаємо її СТАЦІОНАРНИМИ, або КРИТИЧНИМИ, або ЕКСТРЕМАЛЬНИМИ), можливо ширша, ніж множина абсолютних, а також локальних екстремумів.

Тому далі потрібно з кожною точкою розібратися, доставляє вона екстремум(і який) чи ні.

Це робиться з допомогою достатніх умов.

Перші задачі на максимум і мінімум були сформульовані в старовину, коли математика зароджувалась ще як наука.

В наш час неможливо мати якісну математичну освіту без елементів теорії екстремуму.

Весь світ побудований на екстремальних властивостях.

**Розділ 1.** Класичні методи. Мінімізація функції однієї змінної

**§ 1 Постановка задачі.**

Постановка задачі пошуку мінімуму функції однієї змінної містить:

* цільову функцію
* множину допустимих розв’язків X, серед елементів якої здійснюється пошук мінімуму.

Потрібно знайти таку точку із множини допустимих розв’язків, якій відповідає мінімальне значення цільової функції на цій множині

(1.1)

**Означення 1.1**. Точка називають точкою ГЛОБАЛЬНОГО МІНІМУМУ функції на множині , якщо функція досягає в цій точці свого найменшого значення

**Означення 1.2**

Точка називається точкою ЛОКАЛЬНОГО МІНІМУМУ ( функції на множині

Якщо існує , таке, що якщо то

**Зауваження 1.1**

1. Якщо X=[a,b], то розв’язується задача на знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку [a,b]
2. Якщо X=R1, то розв’язується задача пошуку безумовного мінімуму.
3. В oзначенні 1.1. точка порівнюється по величині функції із всіма точками із множини допустимих розв’язків Х, а в означенні 1.2. – тільки з точками , що входять в точки
4. Якщо в означеннях 1.1. і 1.2. знак нерівності ≤ замінити на ≥, то отримаємо означення глобального максимуму і локального максимуму.

**§2** **Принципи побудови необхідних і достатніх умов   
безумовного екстремуму функції однієї змінної.**

На малюнку **2.1**. дано графічне зображення функції , яка має локальний мінімум в точці , глобальний мінімум у точці , та точку перегину

**Мал. 2.1**

Класичний підхід в задачі знаходження значень і полягає в пошуку рівнянь, яким вони повинні задовольняти

Зображена на малюнку 2.1. функція і її похідна неперервні і видно, що в точках  
 і похідна таким чином і будуть розв’язками рівняння

(1.2)

Точка , в якій досягається і точка , в якій функція має перегин теж задовольняють рівнянню 1.2.

Таким чином, рівняння 1.2. є лише необхідною умовою мінімуму, але не є достатньою умовою мінімуму.

Очевидно, що в точках і похідна змінює знак з додатнього на від’ємний.

В той час як в точці він не змінюється.

Таким чином, похідна в мінімумі є зростаючою функцією, а оскільки зростання вимірюється другою похідною, можливо очікувати, що   
 , тоді як

Але якщо друга похідна рівна нулю ситуація лишається невизначеною.

Одержані вище результати можуть знайти надійне обґрунтування, якщо розглянути означення (1.1) і розкладати функцію в ряд Тейлора в точки ( або , або ), що звісно потребує неперервності і її похідних.

**ТЕОРЕМА 1** (Необхідна умова екстремуму першого порядку)

Нехай функція - функція однієї дійсного змінної. Якщо - точка локального екстремуму і діференційована в точці то

**Доведення**

По означенню диференційованості

, (1.3)

при малих .

Таким чином

(1.4)

Якщо б то при h достатньо близьких до нуля, величина мала би знак оскільки при

Саме ж h може приймати як додатні так і від’ємні значення.

Виходить, що різниця в (1.4) може бути як більше, так і менше нуля.

Це суперечить тому, що при і   
 при .

Геометрично **ТЕОРЕМА 1** (Теорема Ферма) стверджує, що в точці екстремуму диференційованості функції дотична до її графіку - горизонтальна.

**ТЕОРЕМА 2** (**Необхідна умова екстремуму другого порядку**)

Нехай функція визначена, неперервна і двічі диференційована . Якщо - точка локального мінімуму функції, то ,

Якщо – точка локального максимуму функції, то ;

**ТЕОРЕМА 3**(Достатні умови екстремуму)

Нехай функція двічі диференційована.

* Якщо в точці виконуються умови ; о - точка локального мінімуму функції
* Якщо в точці виконуються умови ; то – точка локального максимуму функції

**ДОВЕДЕННЯ** (для мінімуму)

По формулі Тейлора

**НЕОБХІДНІСТЬ**

Нехай , тоді, по-перше, за необхідною умовою екстремуму 1-го порядку для функції однієї змінної (теорема Ферма) , по-друге, , при достатньо малих h (по означенню)

Тому за формулою Тейлора

При малих h. Розділимо обидві частини останньої нерівності на h2 і направимо h до нуля.

Так як ,то отримаємо, що .

**ДОСТАТНІСТЬ**

Нехай  *,* тоді за формулою Тейлора в силу умови

для будь-якого при достатньо малих h маємо

Якщо

Таким чином,

Для локального максимуму нерівності мають протилежний вид:

і відповідно

**ТЕОРЕМА 4**

Нехай функція m-раз диференційована в точці , то точка  *–*  точка локального мінімуму(максимуму) функції тоді і тільки тоді, коли m-парне і m-порядок першої похідної, що не перетворює в нуль похідну в цій точці.

Якщо то в точці

Якщо то в точці

Якщо m -число не непарне, то в точці екстремуму немає.

**ДОВЕДЕННЯ**

Нехай для визначеності по формулі Тейлора

**НЕОБХІДНІСТЬ** при m=1 виходить із теореми Ферма. Нехай далі m>1

Тоді або

або

таким чином

Так як

, то

При достатньо малих по модулю h. Так як , то звідси випливає, що і

**Алгоритм розв’язування задач за допомогою першої похідної**

**КРОК 1.** Знайти область визначення функції

**КРОК 2.** Знайти похідну

**КРОК З.** Виписати необхідну умову екстремуму

а)

б)

в) не існує

Дослідження всіх інших точок відпадає. Точки, які задовольняють умови а) - в) називають ***критичними***.

Нехай цими точками будуть точки з абцисами ,…, , які знаходяться в інтервалі (a,b).

**КРОК 4**. Всі критичні точки розташувати в порядку зростання їх абцис в інтервалі ( а,b).

a b

**КРОК 5.** Всередині кожного із інтервалів; … взяти будь-яку «зручну для обчислень» точку і установити в цій точці знак першої похідної (похідна зберігає знак в кожному інтервалі між двома сусідніми критичними точками)

**Крок 6**. Розглянути знак в двох сусідніх інтервалах і перейти послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього

Якщо при такому переході знаки  в двох сусідніх інтервалах різні, то екстремум в критичній точці маємо: максимум буде, якщо знак поміняти з + на - ,а мінімум, якщо він міняється з – на +.

Якщо в двох сусідніх інтервалах знак першої похідної не змінюється, то екстремуму немає

**Крок 7**. Знайти значення функції в точках, де вона досягає екстремуму.

**Приклади**

**Приклад 1**. Знайти екстремум функції .

**Розв’язання:**

**Крок 1**. Областю існування функції являється інтервал або .

**Крок 2**. Знаходимо першу похідну 

**Крок 3**. Записуємо необхідну умову екстремуму

а)  і знаходимо розв’язок рівняння:









Похідна скінченна при будь-яких х. Тому критичними точками будуть тільки знайдені із умови а) .

**Крок 4**. Розміщуємо критичні точки в порядку зростання абцисc:-1; 0; 3



-1 0 3 x

**Крок 5**. Розглянемо інтервали

; ; ; 

В середині кожного із цих інтервалів візьмемо зручну для обчислень точку і визначимо знак першої похідної

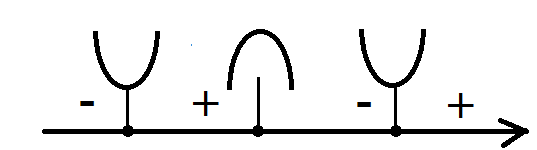
На інтервалі :

На інтервалі : 

На інтервалі :

На інтервалі :

**Крок 6**. Таким чином, в інтервалах



-1 0 3

Перша похідна має таку властивість знаків: -,+,-,+; і ми робимо висновок, що







**Крок 7**. Тепер знайдемо екстремальні значення функції

,

**Приклад 2**. Знайти екстремум функції

**Розв’язання:**

**Крок 1**. ОІФ:

**Крок 2**.

**Крок 3**. Рівняння =0 не задовольняє ні одному скінченному значенню х. Розглянемо варіанти б) і в), при яких або не існує.

Ясно, що таким єдиним значенням буде =0 (т.т. )

Таким чином маємо єдину критичну точку =0 і

**Крок 4**. 

0

**Крок 5**.

**Крок 6**. Послідовність знаків першої похідної такий: -, +; екстремум є

**Крок**. .

Дослідження заданної функції по другій похідні провести неможливо, т.я.  
 не існує.

**Приклад 3.** Знайти екстремум функції

**Розв’язання:**

**Крок1**. ОІФ : , де

**Крок 2**. На інтервалі також визначена, неперервна і диференційована i

**Крок 3**. На інтервалі ,

На інтервалі ,

В точці не існує, так як

; ,

тобто похідна не існує.

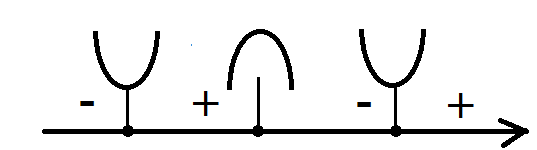
**Крок 4.** є критичні точки.

**Крок 5**. На інтервалі

На інтервалі

На інтервалі

На інтервалі



-2.5 0 2.5

**Крок 6**. є locmin ;

є locmax ;

є locmin ;

**Крок 7**. , ,

**Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення функції f(x)   
на відрізку [a,b].**

**Крок 1**. Вичислити першу похідну

**Крок 2**. Знайти критичні точки функції, що належать інтервалу (a,b)

**Крок 3.** Вичислити значення функції в критичних точках, що належать інтервалу (a,b) і на кінцях відрізку [a,b]

**Крок 4**. Найбільше із значень, одержаних на кроці 3 буде найбільшим, а найменше найменшим значенням на відрізку [a,b]

**Приклад 4.** Найти найменше і найбільше значення функції 0 на відрізку [1,], де

**Розв’язання:**

**Крок 1.** Область існування функції інтервал (0, +∞). Похідна існує для всіх точок цього інтервалу.

**Крок 2.**

**Крок 3**.

не входить ОІФ

**Крок 4.** . При функція досягає найменшого значення .

При функція досягає найбільшого значення

**Алгоритм розв’язування задач за допомогою другої похідної**

**Крок 1.** Знайти область існування функції

**Крок 2**. Вичислити першу похідну

**Крок 3**. Рішити рівняння і знайти стаціонарні точки

**Крок 4**. Вичислити другу похідну в кожній із стаціонарних точок

а) Якщо , то є locmin

б) Якщо , то є locmax

в) Якщо , то потрібно продовжити дослідження

**Приклад 5.** Знайти екстремум функції

**Розв’язання:**

**Крок 1.** Область існування функції

**Крок 2.**

**Крок 3**. Виписати необхідну умову першого порядку

або

*-* стаціонарні точки

**Крок 4**. Вичислити

**Крок 5**. а) Досліджуємо стаціонарну точку

є locmin

б) Досліджуємо стаціонарну точку

є locmax

в) Досліджуємо стаціонарну точку

є locmin

**Крок 6**.

**Задачі для самостійного розв’язання.**

**Задача**. Знайти екстремум функції на множині

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

**§3. Необхідні і достатні умови безумовного екстремуму   
функції f(x) багатьох змінних.  
Постановка задачі**

Нехай . Потрібно дослідити функцію на екстремум , т.т. знайти точки її локальних мінімумів і максимумів на

*;*(3.1)

*;*(3.2)

Приведемо деякі відомі поняття і позначення, точки простору будемо позначати символом . Для позначення вектора-рядка використовується символ

**Означення 3.1**  Градієнтом ∇f(x) неперервно-диференційованої функції f(x) в точці x називається вектор-стовбчик, елементами якого являються частинні похідні першого порядку, які обчислені в данній точці

Градієнт функції напрямлений по нормалі до поверхні рівня, т.т. перпендикулярно до дотичної площини, що проведена в точці х, в сторону найбільшого зростання функції.

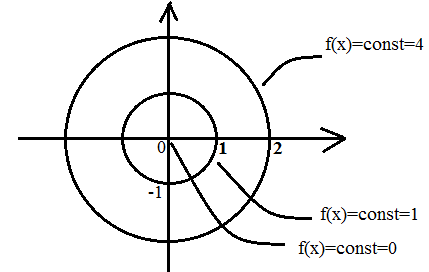
**Означення 3.2** Поверхнею рівня функції f(x) називається множина точок, в яких функція приймає постійне значення, т.т. f(x)=const

Якщо n=2, поверхня рівня зображена лінією рівня на площині R2

**Приклад 3.1** Побудувати лінії рівня функції f

**Розв’язання**

Рівняння лінії рівня має наступний вигляд: f = const= R2 рівняння кола з центром в точці і радіусом, рівним R.



**Означення 3.3** Матрицею Гессе H(x) двічі неперервно-диференційованої в т. х функції називається матриця частинних похідних другого порядку, що обчислена в даній точці.

де hij= , i, j=

**Зауваження 3.1**

1. Матриця Гессе є симетричною розміру nxn.
2. Разом з графіком можемо визначити вектор антиградієнта, який рівний по вектору градієнта, але протилежні по направленню.
3. З допомогою градієнта і матриці Гессе, використовуючи розкладання в ряд Тейлора, приріст функції f(x) в точці х може бути записаний в формі

де – сумма членів розкладання, що мають порядок вище другого

– квадратична форма

**Приклад 3.2** Для функції необхідно:

1. Визначити і побудувати градієнт в точці

2. Побудувати матрицю Гессе

3. Побудувати перший диференціал

1. Побудувати другий диференціал

**Означення 3.4** Квадратична форма (а також відповідна матриця Гессе) являється:

**-додатноозначеною** (H(x)>0), якщо для любого ненульового () виконується нерівність >0

**-від’ємновизначеною** (H(x)<0), якщо для любого ненульового () виконується нерівність 0

**-знакододатньою** (H(x) 0), якщо для любого ненульового () виконується нерівність 0, і знайдеться відмінний від 0 вектор , для якого 0

**-знаковід’ємною** (H(x) 0), якщо для любого ненульового () виконується нерівність 0, і знайдеться відмінний від 0 вектор , для якого 0

**-невизначеною** (H(x) 0), якщо існують такі вектори і , на яких виконуються нерівності

>0

<0

**-тотожно рівною 0** (Н(х)≡0) якщо для любого 𝑥 виконується рівність

0

**Приклад 3.3** Провести класифікацію квадратичної форми і матриці Гессе   
 з прикладу 3.2

**Розв’язання**

Випишемо квадратичну форму

Очевидно, що >0 для любого ненульового

Згідно означенню 3.4 квадратична форма (матриця Гессе) додатноозначена.

**Приклад 3.4** Побудувати матрицю Гессе функції в точці   
 і провести її класифікацію.

**Розв’язання**

Випишемо квадратичну форму

Очевидно, 0 для будь-якого вектору і =0 для =0 і любого . Згідно означенню 3.4 квадратична форма (матриця Гессе) додатноозначена.

**Приклад 3.5** Знайти матрицю Гессе функції і провести її класифікацію

**Розв’язання**

Згідно визначення 3.4 одержимо

Випишемо відповідну квадратичну форму

При =0 і будь-яких 0 квадратична форма відємна. А при додатна. Згідно визначення 3.4 квадратична форма (матриця Гессе) невизначена

**Означення 3.5.** Множина називається опуклою, якщо вона містить будь-який відрізок, кінці якого належать *Х* , тобто, якщо для будь-яких і є *Х* і справедливо

Або, іншими словами, випуклими являються множини, які не містять «дірок», «вм’ятин» і складаються із одного куска , відрізок, пряма, точка, шар, ∅ площина – векторні множини.

**Означення 3.6** Нехай f функція f(x) на множині Х називається випуклою, якщо

**Означення 3.7** Функція f(x), що визначена на випуклій множині Х називається строго випуклою, якщо

**Означення 3.8** Функція, що визначена на випуклій множині Х називається сильно випуклою з константою l, якщо

**Означення 3.9** Нехай f функція f(x) випукла (строго випукла) тоді і тільки тоді, коли

**Зауваження 3.1**

1. Функцію f(x) називають випуклою, якщо вона повністю лежить не вище відрізку, що з’єднує дві її точки. Функцію називають строго випуклою, якщо вона повністю лежить нижче відрізку, що з’єднує дві її довільні точки

2. Якщо функція сильно випукла, то вона одночасно випукла.

3. Випуклість функції можна визначити на матриці Гессе

- якщо H(x)≥0, , то функція випукла.

- якщо H(x)>0, , то функція строго випукла.

- якщо H(x)≥E, , де Е – одинична матриця, то функція сильно випукла.

**Приклад 3.4** Дослідити випуклість функції f(x)= на множині

**Розв’язання**

якщо 0<*l*≤2

Згідно п.3 зауваження 3.1 можна зробити висновок, що f(x) сильно випукла.

Одночасно вона являється строго випуклою і випуклою.

**Твердження 3.1**

**1.** Якщо f(x) випукла функція на випуклій множині Х, то будь-яка точка локального мінімуму являється точкою її глобального мінімуму на Х.

**2.** Якщо випукла функція досягає свого мінімуму у двух різних точках, то вода досягає мінімуму у двух точках відрізку, що з’єднує ці дві точки.

**3.** Якщо f(x) строго випукла на випуклій множині Х, то вона досягає свого глобального мінімуму на Х не більш чим в одній точці.

**Означення 3.7.** Функція f(x) задовольняє умові Ліпшиця на відрізку [a,b] якщо існує таке число l>0 (константа Ліпшиця), що для будь-яких є [a,b]

**§4 Критерій Сільвестра**

Знакоозначеність матриць можна установити за допомогою критерія Сільвестра**.**

**Означення 4.1** Розглянемо визначник матриці Гессе , який обмежений у стаціонарній точці х.

1. Визначники

називаються кутовими мінорами

2. Визначники m-го порядку (m≤n), які можна одержати із визначника матриці ви кресленням яких-небудь (n-m) строчок і (n-m) стовпчиків з однаковими номерами, називається головними мінорами.

**Стратегія розв’язання задач функції багатьох змінних**

Сформулюємо необхідні умови екстремуму 1 порядку в просторі **R’’** без обмежень, які є аналогом теореми Ферма

**Теорема 4.1** ( Необхідна умова екстремуму 1 порядку )

Нехай = (, ,…,) *locextr f -* точка локального екстремуму функції n-змінних f(,…,) і функція f () діферінційована в точці , тоді градіент функції f() в точці дорівнює нулю, т.т.

*f()=0 (4.1)*

або

*=0, i=1,2,…,n* (4.2)

***Доведення.*** Розглянемо функцію однієї змінної

*φ) = (, ,…,)*

Так як = (, ,…,) *locextr f,* то *locextr φ.*  Крім того

*𝜑 ().*

По необхідній умові екстремуму для функції однієї змінної – теорема Ферма

*𝜑’) =0 <=> =0 (4.3)*

***Означення 4.2*** Точки = (,…,), які задовільняють умови (4.1) або (4.2)

називаются стаціонарними.

***Теорема 4.2*** (Необхідні умови екстремуму другого порядку)

Нехай = (, ,…,) *locextr f* функції *f(x)* на Rn і функція *f(x) ().* Тоді матриця Гессе H( функції f(x), яка обчислена в точці являється додатно означеною (від’ємно означеною), т.т

H(≥0 (4.4)

H( (4.5)

***Теорема 4.3*** (Достатня умова екстремуму)

Нехай функція *f(x)* в точці R’’ двічі диференційована (*f(x) ())*,

Ії градієнт дорівнює нулю, а матриця Гесе являються додатноозначеною (від’ємно означеною), т.т

*f()=0 і* H(> 0 (4.6)

( *f()=0 і* H( (4.7)

Тоді точка *locmin(max) f* на множині Rn

***Доведення.***  По формулі Тейлора   
*f(x\*+h)=f(x\*)+ f(), h + ∙ H(x\*) ∙ h+r(h), r(h) = 0(|h|2)*

Доведемо теорему для випадок мінімуму . Випадок максимуму аналогічний.

***Необхідність*** Так як  *locmin f ,* то, по-перше, по необхідній умові 1 порядку в просторі Rn – аналогу теореми Ферма

*f()=0*

По-другому

*f(+ h) - f()≥0* при достатньо малих . Тому по формулі Тейлора

*f(+ h) - f()=<f’’(x)h, h>+r(*

*(r(2))* при малих h і фіксованому . Розділимо обидві частини останньої нерівності на *2* и спрямуємо до нуля.

Так як 0, то одержимо, що

(hT *H(x\*) h) ≥ 0 ∀h R2*

***Достатність.*** Так як  *f()=0,* то по формулі Тейлора в силу виконання умови   
(hT H(x\*) h) ≥ λ|h|2 маємо

F(x\*+h) – f(x\*) =  *hTH(x\*)h + r(h) ≥ + |h|2+r(h)≥0*

При достатньо малих h, таких як r(h) = 0 (|h|\*). Тому *locmin f .*

Для перевірки виконання достатніх умов екстремуму і виконання необхідних умов другого порядку використовуються 2 способи.

**А.** ***(критерій перевірки достатнії умов екстремуму (критерій Сільвестра).***

1. Для того щоб матриця H(x\*) було додатньо означена (H(x\*)>0) і точка x\* являлась точкой локального мінімума, необхідно і достатньо, щоб знаки кутових мінорів були строго додатники:

>0,>0, … , >0 (4.8)

2. Для того щоб матриця Гесе H(x\*), була від’ємно означеною (H(x\*)<0) і точка x\* являлась точкою локального максимума необхідно і достатньо, щоб знаки кутових мінорів чередувалися, починаючи за від’ємного

<0,<0, … , (-1)n<0 (4.9)

**Б.** **критерій перевірки необхідних умрв екстремуму другого порядку**

1. Для того щоб матриця Гессе H(x\*) була знакододатньою (H(x\*) ≥0 ) і точка х\* можливо являлася такою локального мінімуму , необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори визначника матриці Гессе були невід’ємними.

2. Для того щоб матриця Гессе H(x\*) була знаковід’ємною (H(x\*)≤0) і точка x\* можливо є точкою локального максимуму, необхідно і достатньо, щоб всі мінори парного порядку булі невід’ємними, а всі мінори непарного порядку – недодатніми.

**Другий спосіб** *( за допомогою власних чисел матриці Гессе).*

**Означення 4.3** Властиві значення матриці H(x\*) розміром nxn знаходяться як корні характиристичного рівняння:h

*|H()- E| = =0*

***Критерій перевірки достатніх та необхідних умов другого порядку в задачі знаходження безумовного екстремуму***

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  п/п | *f()* | *H()* | Умови | Перший спосіб | Другий спосіб | Тип стаціонарної точки x\* |
| 1 | 0 | >0 | Достатні умови екстремуму | >0,>0, … , >0 | ,…,n>0 | Локальний мінімум |
| 2 | 0 | <0 | Достатні умови екстремуму | <0,<0, … , (-1)n<0 | ,…,n>0 | Локальний максимум |
| 3 | 0 | ≥0 | Необхідні умови екстремуму другого порядку | Усі головні мінори визначника матриці *H()* ненегативні | ,…,n>0 | Може бути локальним мінімумом, необхідно додаткове дослідження |
| 4 | 0 | ≤0 | Необхідні умови екстремуму другого порядку | Усі головні мінори парного порядку ненегативні, а непарного порядку непозитивні | ,…,n>0 | Може бути локальним максимумом, необхідно додаткове дослідження |
| 5 | 0 | =0 | Необхідні умови екстремуму другого порядку | Матриця Гесе складається з нульових елементів | ,…,n=0 | Необхідно додаткове дослідження |
| 6 | 0 | ><0 | Необхідні умови екстремуму другого порядку | Не виконуються умови п.1-5 | мають різні знаки | Нема екстремуму |

***Алгоритм розв’язання задачі****:* ***f(x)→***

**Крок 1.** Виписати необхідні умови екстремуму першого порядку:   
 *f()=0;*

**Крок 2.** Знайти стаціонарні точки х\* по результатам рішення системи n  d в загальному вигляді нелінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими.

Для чисельного рішення системи можна використовувати метод простої ітерації, Зейдека, Ньютона.

**Крок 3.** В знайдених стаціонарних точках х\* перевірити виконання достатніх, а якщо вони не виконуються, то необхідних умов другого порядку з допомогою одного із 2 способів.

**Крок 4.** Вичислити значення *f() у* точках екстремуму.

**Приклад 4.1** Знайти екстремум функції f(x) = + на R2

**Розв’язання**

**Крок 1.** Запишемо необхідні умови екстремуму 1 порядку:

*f() ==*

**Крок 2.** В результаті рішення системи

Одержуємо стаціонарну точку

x\*=( )T=(0;0)T

**Крок 3.**  Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму

-Побудуємо матрицю Гессе:

H(x)==

Так як ∆1 = h11=2>0

∆2== 4 > 0, то в точці х\* locmin f;

**Крок 4.** Обчислимо значення функції в точці x\*=(0;0)T; f(x\*)=0

***Зауваження 4.2***

1. Якщо потрійно знайти глобальні екстремуми, то вони знаходяться в результаті порівняння значень функцій в точках локальних мінімумів і максимумів з урахуванням обмеженності функції

(Вітки йдучі наліву – так, направо – ні)

Схема 4.1

Зрозуміло, що функція являється строго випуклою на R2.

Тому точка локального мінімуму являється і точкою глобального мінімуму.

***Приклад 4.2*** Знайти екстремум функції f(x) = - на R2

**Розв’язання**

**Крок 1.** Запишемо необхідні умови першого порядку

*f()=;*

**Крок 2.** Рішаємо систему

І одержуємо стаціонарну точку

x\*=( )T=(0;0)T

**Крок 3.** Перевіримо виконання достатніх умов екстремуму

Матриця Гессе має вигляд

H(x\*)=

Так як ∆1 =2>0

∆2== -4 < 0,

То достатні умови не виконуються згідно схеми 4.1,

Перевіримо виконання необхідних умов 2 порядку. Головні мінори першого порядку (m=1) одержимо із

∆2=

По результату викреслення n-m=2-1=1 строк і стовпчиків з однаковими номерами  
 =-2;=2,

Головних мінорів 2 порядку (m=2) одержуємо із ∆2 по результату викреслення n-m = 2 – 2 =0 строк і стовпців, т.т. =-4.

Звідси маємо результат, що необхідні умови екстремуму другого порядку не виконується, так як матриця Гессе не є нульовою, то можна зробити висновок, що у точці x\*=(0;0)T не має екстремуму

***Приклад 4.3*** Знайти екстремум функції f(x) = + на R2

**Розв’язання**

**Крок 1.**

*f(x)=*

**Крок 2.**

=( )T=(0;0)T

**Крок 4.** Перевіримо виконання достатніх і необхідних умов другого порядку

H(x\*)==

так як =2 >0; = =0,

то достатні умови екстремуму не виконуються.

Згідно схеми 4.1 перевіримо виконання необхідних умов екстремуму другого порядку.

Аналогічно рішенню приклад 4.2 одержуємо головні мінори першого порядку: =2; =0 і головні мінори другого порядку =0

Так як всі головні мінори невід’ємні, то у точці x\* може бути мінімум і потрібно допоміжне дослідження

**Крок 5.** Розрахуємо значення цільової функції у точці x\*: f(x\*)=0. І розглянемо ε – окіл точки x\*=(0;0)T, а також поведінку функції f(x) на множині R2. При любих *x R2*  маємо f(x) ≥ f(x2) = 0, що відповідає визначенню локального і глобального мінімуму.

***Задачі для самостійного розв’язання***

Знайти екстремум функцій

1. f(x) = 2+ + на R2
2. f(x) = (1 – )2 + 10( - )2 на R2
3. f(x) = ---- + + 2на R3
4. f(x) =+ + - 3+ + 2на R3
5. f(x) = - + - - 4 на R3
6. f(x) = 4+3- 4 + на R2
7. f(x) = 2+4 - 10 + на R2
8. f(x) = - + – 2 + 3 – 4 на R2
9. f(x) = 3 - - на R2

Наведемо деякі приклади різних властивостей екстремумів у задачах без обмежень

**Приклад 5.** Глобальні мінімуми і максимуми досягають свого значення у нескінченному числі точок:

F: R → R, f(x) =

**Приклад 6.**  Функція обмежена, глобальний максимум досягається, мінімуму не має:

F: R → R, f(x) =

**Приклад 7.** Функція обмежена, але глобальні максимуму і мінімуму не досягається

F: R → R, f(x) = arctg x

**Приклад 8.** Функція обмежена, має стаціонарні точки, але глобальні максимуми і мінімуми не досягаються

F: R → R, f(x) =( arctg x)3

**Приклад 9.** Функція обмжена, має локальні мінімуми і максимуми, але глобальні максимуми і мінімуми не досягаються

F: R → R, f(x) = arctg x ∙

**Приклад 10.**  Має єдиний локальний екстремум, який не є глобальним

F: R2 → R, f(x1,x2) =

**Приклад 11.** Має безліч локальних максимумів, но не має жодного мінімуму

F: R2 → R, f(x1,x2) =

**Розв’язання**

**Крок 1.**

*f(x)=*

**Крок 2.**

⬄

Стаціонарні точки

X\* = (0; )T

**Крок 3.** Для перевірки достатніх умов 2 порядку виписуєм матрицю Гесе

H(x\*) =

А) H(x\*)=

Б) H(x\*)=

Матриця по критерію Сильвестре являється від’ємно означеною: = -2 < 0; = 2 > 0;

Тому по достатній умові 2 порядку

(0; ) locmax f  *n*

Матриця H(x\*) = по критерію Сільвестра не є від’ємно означеною матрицею   
(A < 0)

Не виконуються необхідні умови локального мінімуму тому точка

(0; ) не доставляє локального мінімуму.

Таким чином, немає жодного локального мінімума